Задание 2

РАЗДЕЛ № 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Задача 1.

Построить графики функций.

$$1¿\, y=2x^2+3x-2,\ 2¿\, y=\ln(2-2x),\ 3¿\, y=-\cos 2x,\ 4¿\, y=x\cdot|x+1|$$

$$1¿\, y=2x^2+3x-2$$

Выделим полный квадрат

$$y=2x^2+3x-2=2\left(x^2+\frac{3}{2}x-1\right)=2\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{25}{16}=¿$$

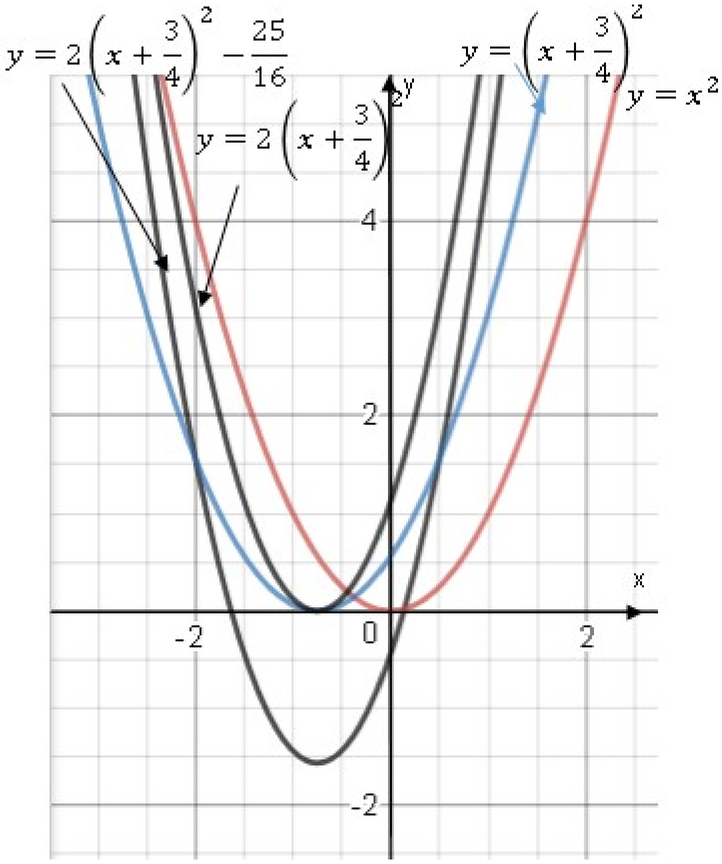
$$¿\,2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}$$

Преобразования квадратичной функции выглядят так:

$$y=\rightarrow y¿\left(x+\frac{3}{4}\right)^2\rightarrow y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2\rightarrow y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}$$

Отсюда получаем, что геометрические преобразования производятся с растяжения вдоль Oy вдвое, сдвигается влево на $\frac{3}{4}$ и вниз на $\frac{25}{16}$ единицы.

Получили требуемый график.



$2¿ y=\ln(2-2x)$

Преобразования логарифмической функции выглядят так:

$$y=lnx\rightarrow\ln 2x\rightarrow\ln(-2x)\rightarrow\ln(2-2x)$$

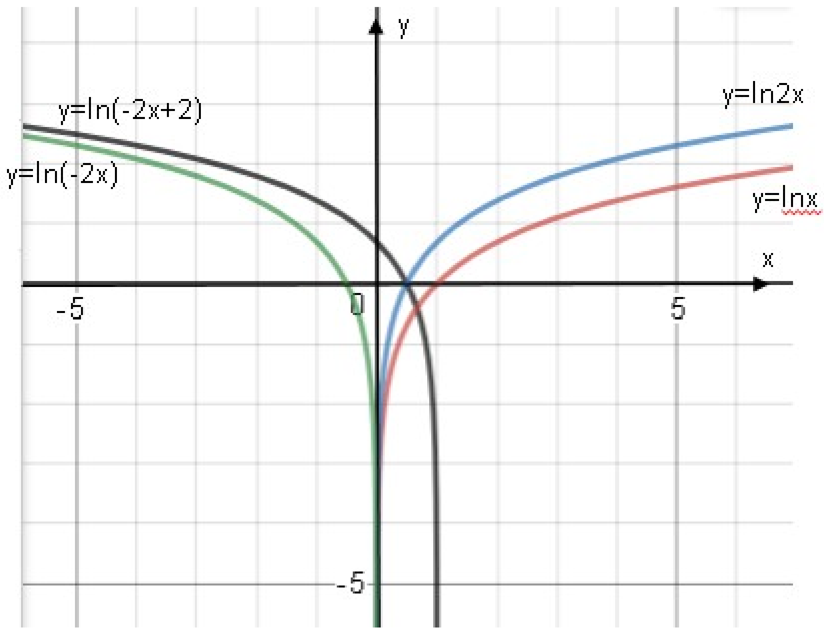
Изобразим график исходной логарифмической функции $y=lnx$

Производим растягивание вдоль в 2 разы Ox.

Производим отображение относительно Oy.

Производим сдвиг на 2 единицы влево.

Получили требуемый график.



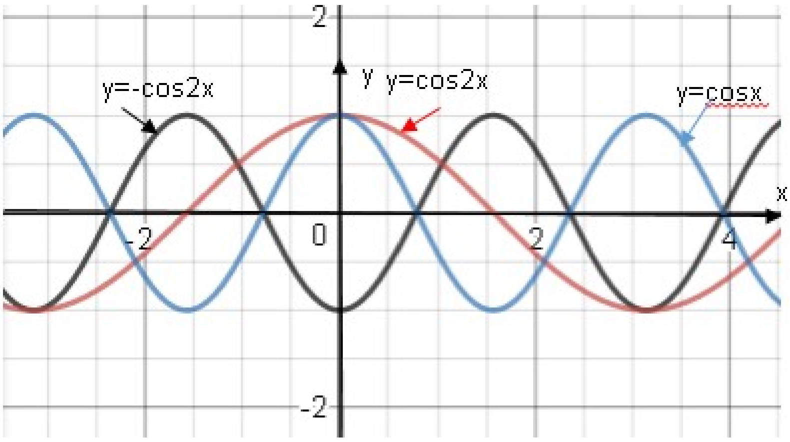
$3¿ y=-\cos 2x$

Преобразования функции выглядят так:

$.y=cosx\rightarrow y=\cos 2x\rightarrow y=-\cos 2x$

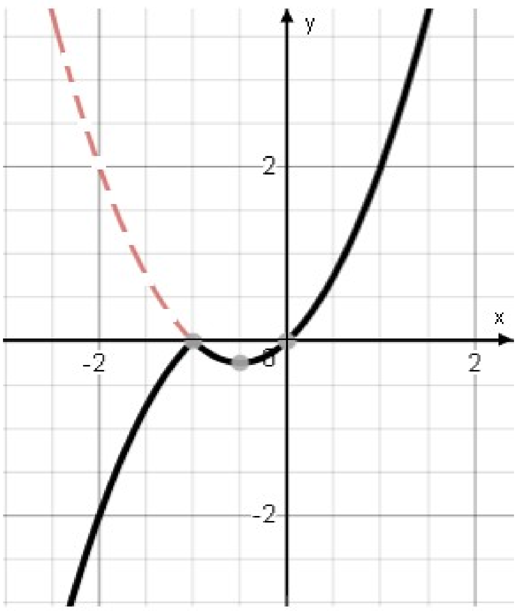
Отсюда получаем, что геометрические преобразования производятся с растяжения вдоль Ox вдвое, отображается симметрично относительно Oy.

Получили требуемый график.



$4¿ y = x \cdot |x+1|$

Строим график функции $y = x \cdot (x+1)$ и там, где $x<1$ т.е. на интервале $(-\infty; -1)$ (вместо графика $y = x \cdot (x+1)$) строим изображение симметричное графику



$y = x \cdot (x+1)$ относительно оси абсцисс.

Задача 2. Записать уравнения кривых в полярных координатах и построить их.

$$,2¿ x¿^2 + y^2 = 125, 3¿ x^2 + y^2 = \frac{x}{4}, 4¿ x¿^2 + y^2 = 12y$$

Решение

► $1) x + y = 1$

Заменяя x и y на r и φ по формулам $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$ получим: $r\,cos\varphi + r\,sin\varphi = 1$ или $r(cos\varphi + sin\varphi) = 1$.

$$r(cos\varphi + sin\varphi) = 1 = ¿\, r\left(cos\varphi + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = 1 = ¿$$

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

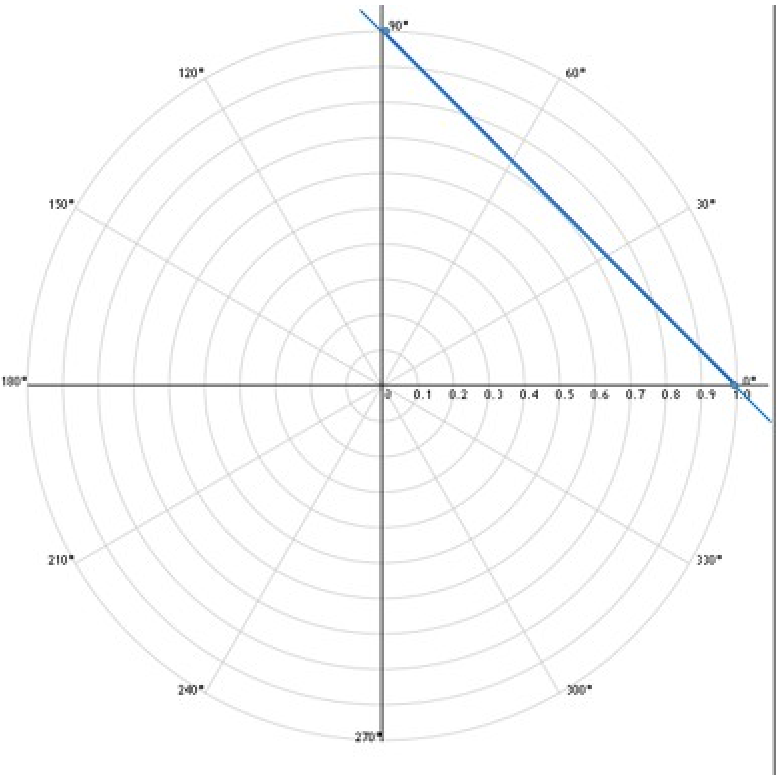
По условию прямая не проходит через начало координат, поэтому ее расстояние r от начала координат отлично от 0. Тогда из последнего равенства следует, что при любом φ и $\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$.

Полярное уравнение данной прямой

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Построим график функции по двум точкам.

$$\varphi=0=¿r=1\,;\varphi=\frac{\pi}{2}=¿r=1$$



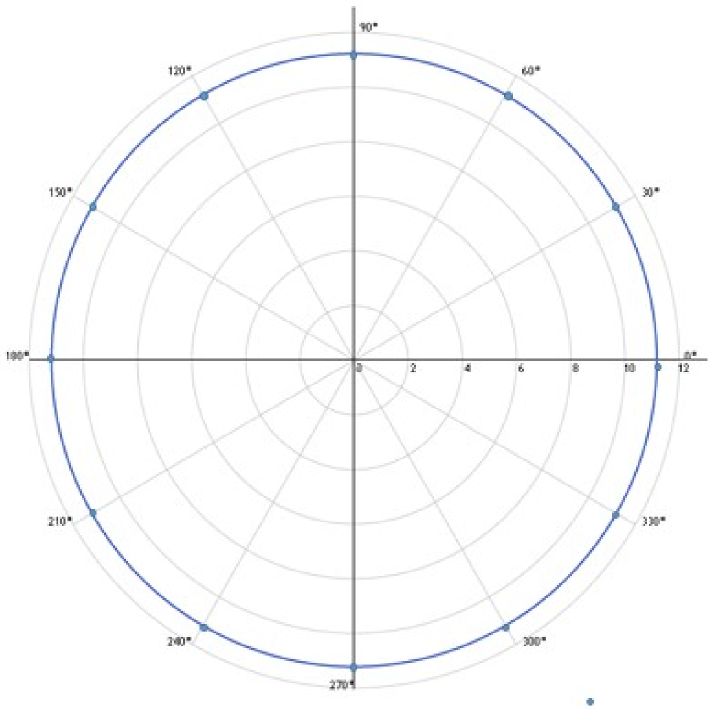
► $2¿x¿^2+y^2=125$

Заменяя $x=¿$ и y на r и φ по формулам $x=r\,cos\varphi\,,\ y=r\,sin\varphi$ получим:

$r^2cos^2\varphi+r^2sin^2\varphi=125=¿r^2\left(cos^2\varphi+sin^2\varphi\right)=125=¿$

$r^2=125=¿r=\sqrt{125}$

Построим график функции по точкам.



► 3 ¿ $x^2+y^2=\frac{x}{4}$

Заменяя $x=$ ¿ и y на r и φ по формулам $x=r\,cos\varphi,\ y=r\,sin\varphi$ получим:

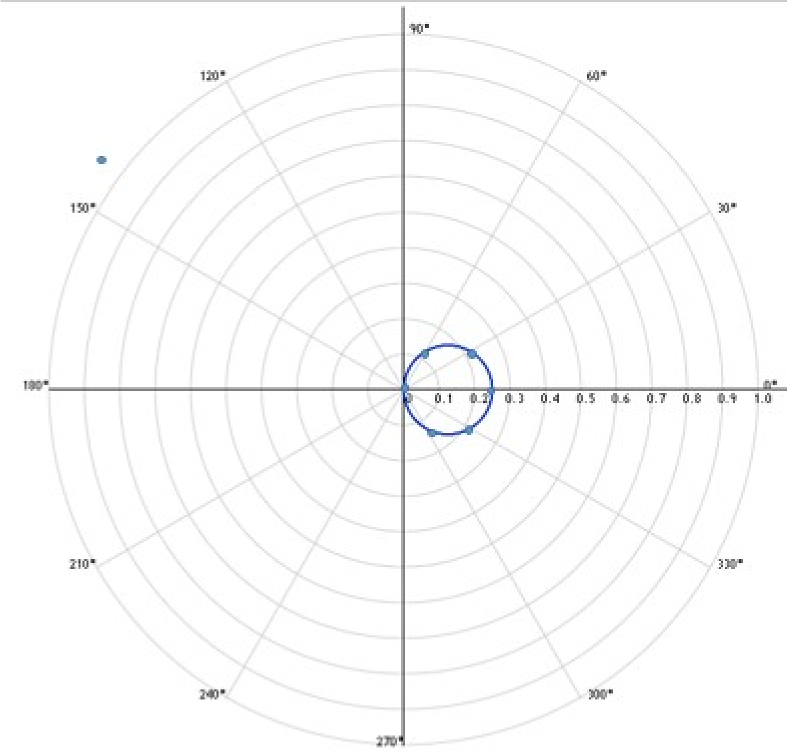
$r^2 cos^2\varphi+r^2 sin^2\varphi=\frac{r\cos\varphi}{4}=$ ¿ $r^2\left(cos^2\varphi+sin^2\varphi\right)=\frac{r\cos\varphi}{4}=$ ¿

$r=\frac{\cos\varphi}{4}$.

Для построения кривой в ПСК вычислим значения функции $r(\varphi)$ в точках $\varphi_k=\frac{\pi k}{3}$ 0, 1, …, 12, входящих в область определения, т. е.в точках, где выполнено условие $r=\frac{\cos\varphi}{4}$, и заполним

k	φ_k	$r(\varphi_k)=\frac{\cos\varphi}{4}$,	k	φ_k	$r(\varphi_k)=\frac{\cos\varphi}{4}$
0	0	0,25	–	–	–
1	π/6	0,216	4	10π/6	0,125
2	2π/6	0,125	5	11π/6	0,216
3	π/2	0	6	12π/6	0б25

Построим график функции по точкам



► $4¿x¿^2+y^2=12y$

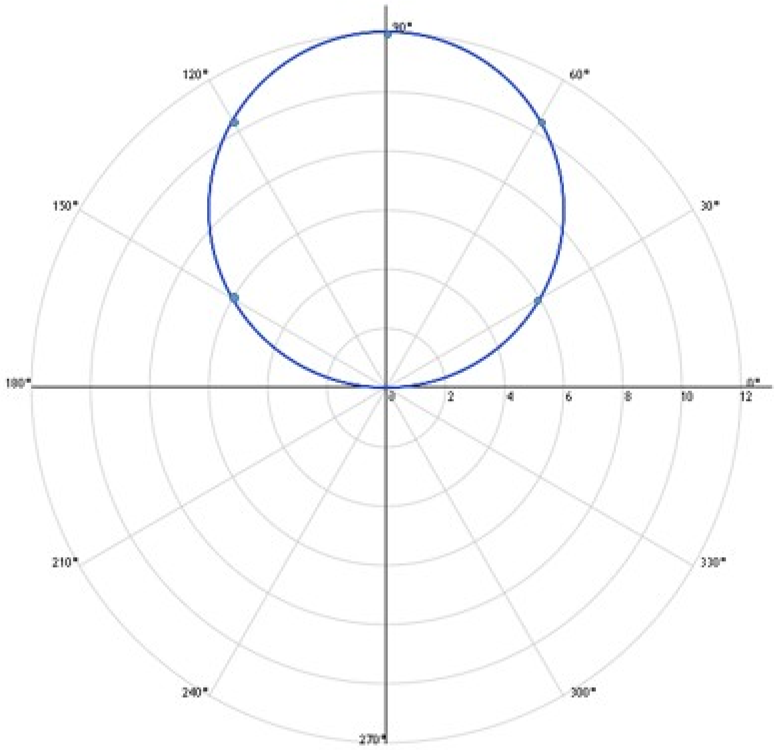
Заменяя $x=¿$ и y на r и φ по формулам$x=rcos\varphi, \; y=rsin\varphi$ получим:

$r^2cos^2\varphi+r^2sin^2\varphi=12rsin\varphi=¿r^2(cos^2\varphi+sin^2\varphi)=¿>¿$

$r=12sin\varphi.$

Для построения кривой в ПСК вычислим значения функции $r(\varphi)$ в точках$\varphi_k=\frac{\pi k}{3}$0, 1, …, 12, входящих в область определения, т. е.в точках, где выполнено условие $r=12sin\varphi$, и заполним

k	φ_k	$r(\varphi_k)=12\,sin\varphi$,	k	φ_k	$r(\varphi_k)=12\,sin\varphi$
0	0	-	–	–	–
1	π/6	6	4	4π/6	10,39
2	2π/6	10,39	5	5π/6	6
3	π/2	12	6	6π/6	0



Задача 3. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

$$1\text{¿}\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+5x-2}{2-\sqrt{6+x}};\ 2\text{¿}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3+x^6}}{(x+1)^2}\text{¿};\ 3\text{¿}\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2}{\sin^2 3x};$$

$$4\text{¿}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+6}{5x-1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}};\ 5\text{¿}\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+7}{x-8}$$

Решение

$$1\text{¿}\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+5x-2}{2-\sqrt{6+x}}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(3x-1)}{\left(2-\sqrt{6+x}\right)}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(3x-1)\left(2+\sqrt{6+x}\right)}{\left(2-\sqrt{6+x}\right)\left(2+\sqrt{6+x}\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(3x-1)\left(2+\sqrt{6+x}\right)}{(2-6-x)}=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(3x-1)\left(2+\sqrt{6+x}\right)}{-(x+2)}=-\lim_{x\to-2}(3x-1)\left(2+\sqrt{6+x}\right)=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}-(3(-2)-1)\left(2+\sqrt{6-2}\right)=28$$

$$2¿\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3+x^6}}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^3}+1}}{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^3}+1}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$3¿\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2}{\sin^2 3x}=\left|\begin{array}{c}\textit{используем заменыэквивалентных бм:}\\ \textit{при } x\to0\ sinx\quad x=¿\sin3x\quad 3x\end{array}\right|=¿$$

$$¿\lim_{x\to0}\frac{x^2(x+1)}{9x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x+1}{9}=\frac{1}{9}$$

$$4¿\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+6}{5x-1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1+7}{5x-1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{5x-1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x}}=¿$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{5x-1}\right)^{5x-1}\right]^{\frac{2x^2+1}{x(5x-1)}}=¿\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{5x-1}\right)^{5x-1}\right]^{\frac{2x^2+1}{x(5x-1)}}¿$$

$$¿\left(e^7\right)^{\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2x^2+1}{x(5x-1)}}=\left(e^7\right)^{\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2x^2+1}{5x^2-x}}=\left(e^7\right)^{\frac{2}{5}}=e^{\frac{14}{5}}$$

$$5¿\lim_{x\to\infty}xln\frac{x+7}{x-8}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+7}{x-8}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-8}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-8+15}{x-8}\right)^x$$

$$¿\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{15}{x-8}\right)^{x-8}\right]^{\frac{x}{x-8}}=\ln\left(e^{15}\right)^{\frac{\lim\limits_{x\to\infty}x}{x-8}}=\ln e^{15}=15$$

Задача 4. Исследовать на непрерывность функции, найти точки разрыва и определить их тип. Построить схематические графики функций.

$$1¿\,y=\frac{x^2-4x+3}{x-3};2¿\,y=\frac{|x+6|}{x+6};3¿\,y=\begin{cases}-x^2+2,-\infty<x\le-1;\\ 3x+2,-1<x\le0;\\ 2,0<x<\infty\end{cases}$$

Решение

$$1¿\,y=\frac{x^2-4x+3}{x-3}$$

Функция не определена в точке x=3.

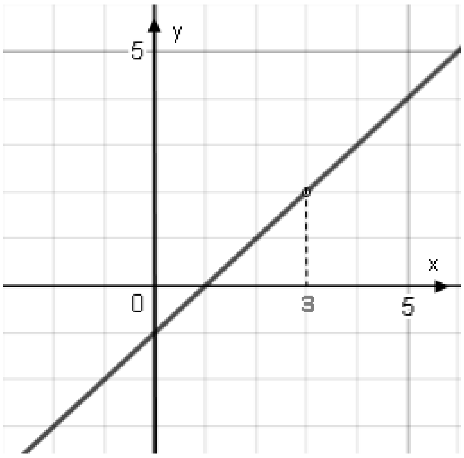
Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to3-0}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=¿\frac{\lim\limits_{x\to3-0}(x-3)(x-1)}{x-3}=\lim_{x\to3-0}(x-1)=2¿$$

$$\lim_{x\to3+0}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=¿\frac{\lim\limits_{x\to3+0}(x-3)(x-1)}{x-3}=\lim_{x\to3+0}(x-1)=2¿$$

Односторонние пределы конечны и равны.

Таким образом, в точке $x=3$ функция терпит устранимый разрыв.



2) Функция определена и непрерывна при всех x, за исключением точки $x=-6$, где существует разрыв. Исследуем точку разрыва.

$$\frac{\lim\limits_{x\to-6-0}|x+6|}{x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to-6-0}-(x+6)}{x+6}=-1\,,\,если\,x\leftarrow 6\,;$$

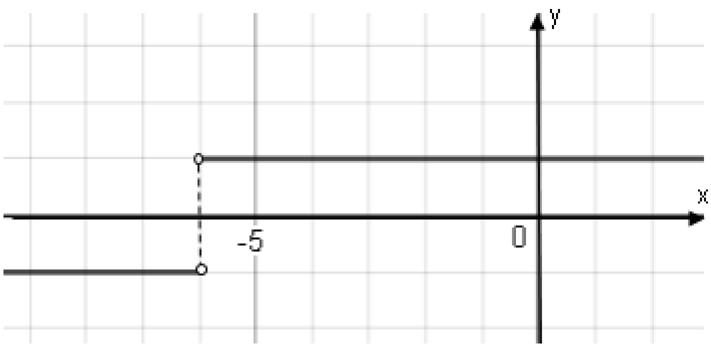
$$\frac{\lim\limits_{x\to-6+0}|x+6|}{x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to-6+0}x+6}{x+6}=1\,,\,если\,x>-6.$$

Так как значения односторонних пределов конечны, то, следовательно, в точке $x=-6$ существует разрыв первого рода.

В этой точке разрыва функция имеет скачек:

$$h=¿\lim_{x\to-6+0}\varphi(x)-\lim_{x\to-6-0}\varphi(x)\vee¿|1-(-1)|=2$$

График функции схематически показан на рисунке



3)Функция $y=f(x)$ определена при $x\in(-\infty;+\infty)$ и непрерывна на интервалах $(-\infty;-1),(-1;0)u(0;+\infty)$, так как задана на них основными элементарными функциями.

Исследуем функцию $y=f(x)$ на непрерывность в точках $x=-1 и x=0$, где происходит смена аналитических выражений функции. Найдем в этих точках односторонние пределы функции.

<u>При x= -1</u>: $\lim_{x\to-1-0} f(x)=¿\lim_{x\to-1-0}(-x^2+2)=1;¿$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x)=¿\lim_{x\to-1+0} 3x+2=-1.¿$$

Так как односторонние пределы существуют, но не равны, то в точке x=-1 имеется разрыв первого рода, неустранимый.

В этой точке разрыва функция имеет скачек:

$h=¿\lim_{x\to-1+0} f(x)-\lim_{x\to-1-0} f(x)\vee¿|1-(-1)|=2.$

<u>При</u> $x=0$: $\lim_{x\to0-0} f(x)=¿\lim_{x\to0-0} 3x+2=2;¿$

$$\lim_{x\to0+0} f(x)=¿\lim_{x\to0+0} 2=2.¿$$

Так как в точке x=0 односторонние пределы равны, и они равны значению функции в этой точке $f(0)=2$, то функция f(x) непрерывна в точке x=0 (по определению)

Строим график функции. При $x\epsilon(-\infty;-1)$ строим график функции- $y=-x^2+2$, а при $x\epsilon(-1;0)$ – график функции-$y=3x+2$. При $x\epsilon(0;+\infty)$ график функции – прямая $y=2$.